Zápočtový test z MA2, varianta C, **9. 5. 2017**

1. Vyšetřete existenci limity

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1-xy}{x-1} \ .$$

Odpověď zdůvodněte. Určete také definiční obor funkce.

Řešení:
Funkce $f(x,y) = \frac{1-xy}{x-1}$ v limitě má definiční obor

$$D : x \neq 1 \ .$$

Přiblížením po přímce $x = 1$ dostáváme

$$\lim_{x\to 1} f(x,1) = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x-1} = -1 \ .$$

Na druhou stranu přiblížením po přímce $y = x$ dostáváme

$$\lim_{x\to 1} f(x,x) = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} -(x+1) = -2 \ .$$

Původní limita tedy neexistuje.

2. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x^2}(1+y) - (1+x)\sin y$$

v bodě $a = (0,0)$ a podle tohoto polynomu rozhodněte, zda má funkce v tomto bodě minimum, maximum nebo sedlový bod.

Řešení:

$$f'(0,0) = \left(2xe^{x^2}(1+y) - \sin y,\ e^{x^2} - (1+x)\cos y\right)_{|(0,0)} = (0,0)$$

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 2e^{x^2}(1+y) + 4x^2e^{x^2}(1+y) & 2xe^{x^2} - \cos y \\ 2xe^{x^2} - \cos y & (1+x)\sin y \end{pmatrix}_{|(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ máme

$$T_2(\mathbf{h}) = f(0,0) + f'(0,0)[\mathbf{h}] + \frac{1}{2!}f''(0,0)[\mathbf{h},\mathbf{h}] = 1 + \frac{1}{2}(h_1,h_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 1 + h_1^2 - h_1h_2.$$

Kvadratická forma

$$Q[\mathbf{h}] := f''(0,0)[\mathbf{h},\mathbf{h}] = h_1^2 - h_1h_2 = (h_1 - h_2)h_1$$

druhé derivace je indefinitní (např. $Q[2,1] = 1 > 0$ a $Q[-1,-2] = -1 < 0$). V bodě $a = (0,0)$ je tedy SEDLO.

3. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint_E x^2y \ dS,$$

kde E je oblast v polorovině $y \geq 0$ a je omezená křivkami $y = x$, $y = -x$ a $x^2 + y^2 = 1$. Tuto oblast načrtněte.

Řešení:
Oblast E je čtvrtina kruhu. Použijeme proto polární souřadnice

$$\Phi : x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

a oblast parametrizujeme množinou

$$U: \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi \ .$$

Pak máme

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} x^2 y \ dS = \iint\limits_{U} (r^2\cos^2\varphi) \cdot (r\sin\varphi) \cdot r \ dr \ d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int\limits_{0}^{1} r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \ dr \ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^1 r^4 \ dr \right) \cdot \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\varphi \sin\varphi \ d\varphi \right) = \frac{1}{5} \cdot \Big[-\frac{\cos^3\varphi}{3} \Big]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}} = \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{30} \ .$$